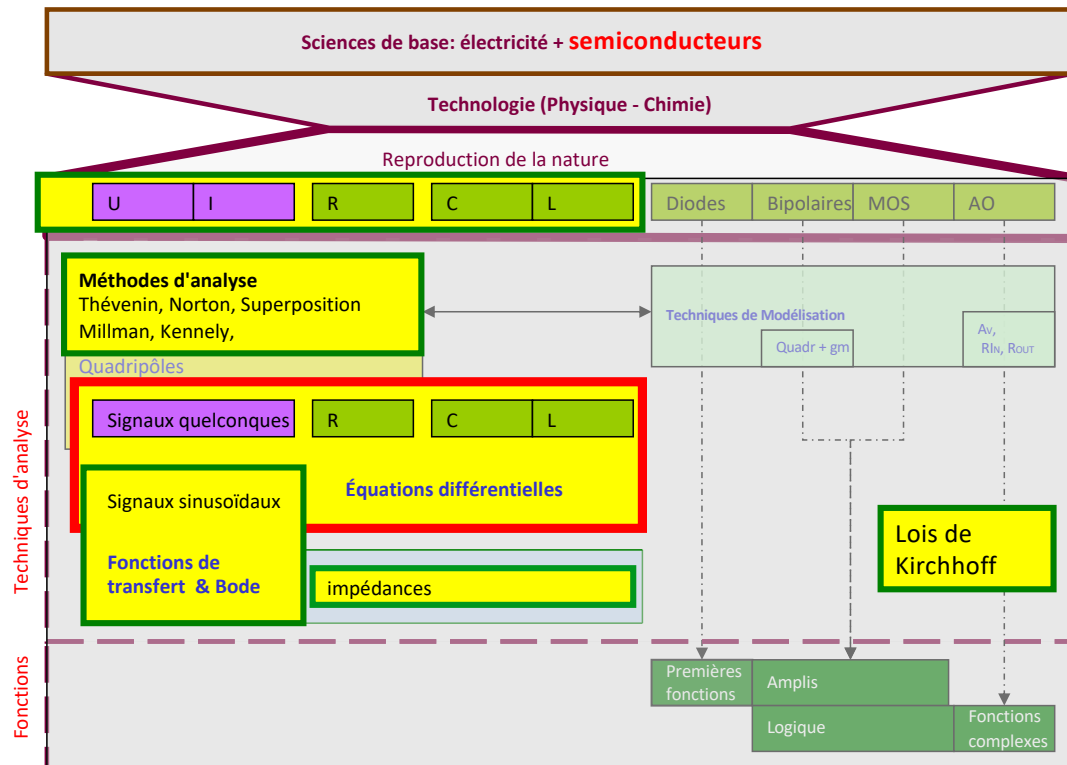


Relations entre les différentes notions



1

Le saut indiciel est le dernier chapitre consacré spécifiquement aux circuits RC. Les montages de base et la plupart des principes vus dans les semaines précédentes seront réintroduits dans de nombreuses applications exploitant des diodes, transistors, amplificateurs opérationnels:

- sous forme volontaire. Le couple $[R, C]$ contribue à la réalisation de certaines fonctions
- Sous forme involontaire. Le couple $[R, C]$ est associé à des modèles de phénomènes parasites qui vont limiter les performances du système ou perturber le système.

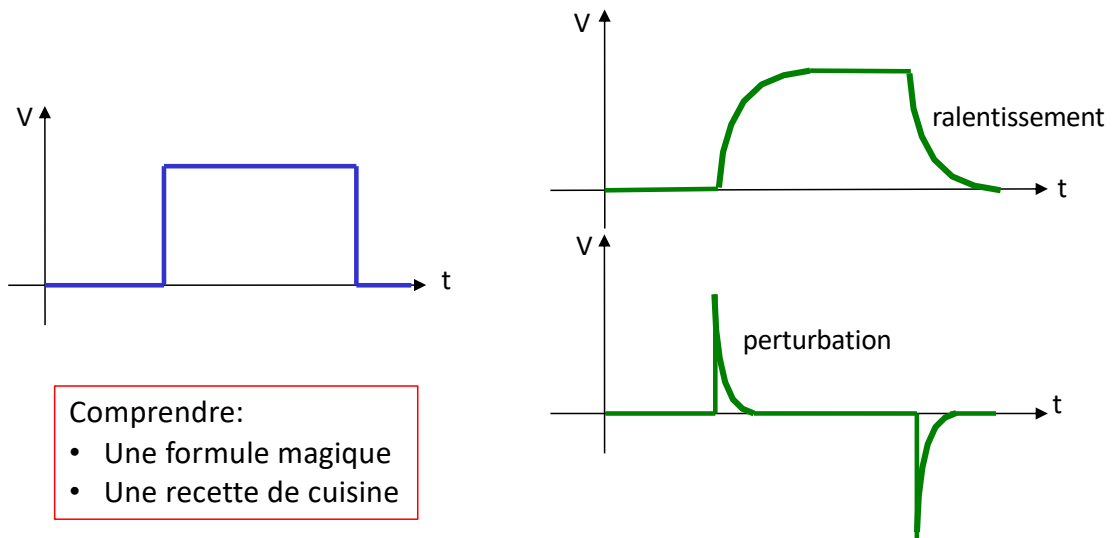
La nature des signaux présentés aujourd'hui (saut indiciel) se retrouve principalement dans le domaine numérique (signaux d'horloge carrés). Nous verrons, que ces signaux peuvent avoir des effets négatifs lorsque l'on mélange des circuits numériques et analogiques, ces derniers pouvant être perturbés.

Sauts indiciels (signaux carrés)

Les combinaisons R et C forment des filtres (volontaires ou involontaires)

Leur **analyse temporelle** pour les **sauts indiciels** :

- Explique les limites en fréquence des circuits numériques
- Couplage parasite produisant des perturbations



2

Le saut indiciel correspond à la seconde catégorie de signaux analysés (après les signaux sinusoïdaux).

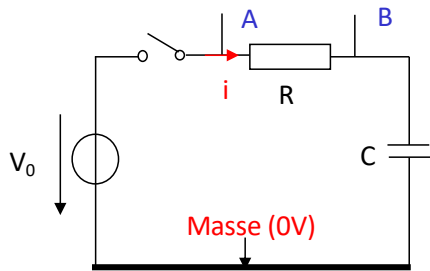
Ces signaux sont particulièrement intéressants en électronique numérique, où les circuits sont "pulsés" par des horloges.

Nous verrons que selon les configurations des circuits, les sauts peuvent avoir un effet sur les performances du circuit (ralentissement) ou sur la qualité des signaux (perturbation)

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Observations

Situation avant l'événement

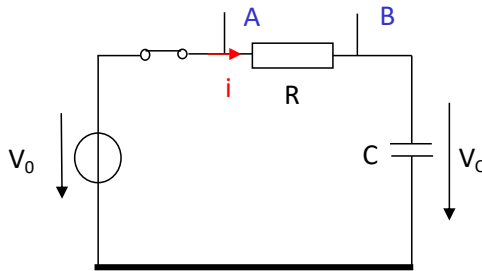


$V_C = 0$
hypothèse

État avant le saut

- $i = 0$
- $V_C = 0$ hypothèse
- $V_B = 0$
- $V_A = 0$

Situation après l'événement



	$t_0 = 0$	$t_1 > t_0$	$t_2 \gg t_0$
V_C	0	↗	$V_C = V_A = V_0$
V_B	0	↗	$V_B = V_A = V_0$
V_A	V_0	=	=
i	$\frac{(V_A - V_B)}{R}$	↘	0

$V_C = V_B$

Imaginons un circuit RC dans deux phases:

- Dans une première phase dite de repos (interrupteur ouvert), aucun courant ne traverse la résistance R et le condensateur est supposé déchargé ($V_C = 0$).
- Dans une seconde phase, l'interrupteur est fermé. La tension V_0 est alors instantanément appliquée sur le point A.

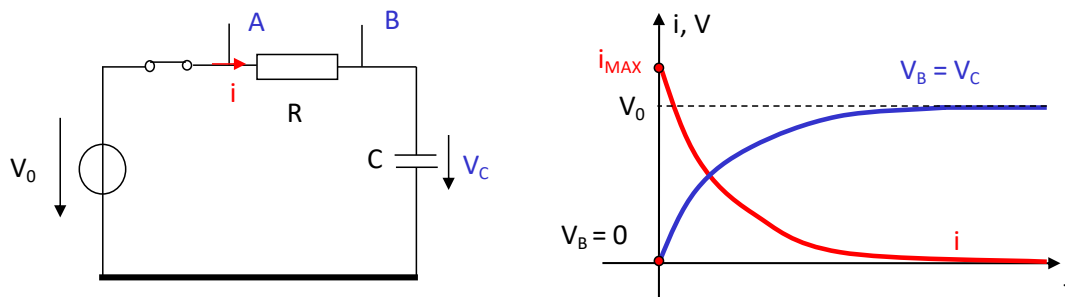
On constate donc une différence de potentiel entre A et B. Ceci se traduit par un courant qui charge le condensateur.

La tension du condensateur monte tant qu'un courant lui est appliqué.

Lorsque le condensateur atteint la tension U, il n'y a plus de différence de potentiel entre A et B, aussi le courant à travers R est nul et le système n'évolue plus.

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse graphique



Faciles à calculer

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{MAX} = \frac{V_0}{R} \text{ et } i_{MIN} = 0 \\ V_{B_MIN} = 0 \text{ et } V_{B_MAX} = V_0 \end{array} \right.$$

Comment déterminer les allures des courbes?

4

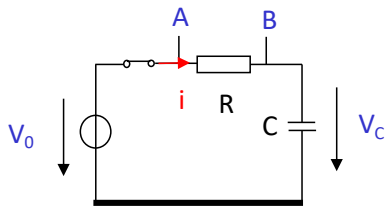
Le circuit proposé est de type passe-bas.

Intuitivement nous pouvons dessiner l'allure des tensions et des courants, sachant que:

- i_{MAX} est obtenu au moment où la différence de potentiel entre A et B est maximale. C'est le cas quand le condensateur n'a aucune charge ($V_B = 0$) au temps $t = 0$.
- i_{min} est obtenu lorsque la tension V_B a atteint V_A . V_B est alors maximal.

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Expression



$$i = \frac{V_0 - V_C}{R} = C \frac{dV_C}{dt}$$
$$V_0 = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

- **Discours mathématique:** Équations sans et avec second membre
- **Discours physique:** Calcul du transitoire et du permanent

TRANSITOIRE :

Ne dépend pas de l'excitation

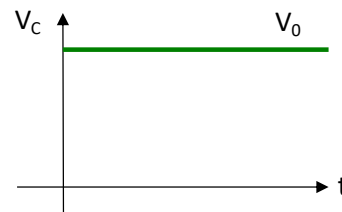
Comportement pour revenir à l'état d'équilibre

Équation sans second membre : $0 = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$

PERMANENT :

Dépend de l'excitation. V_C a l'allure de V_0

$$V_0 = cte \Rightarrow V_C = cte \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow V_C = V_0$$



5

Nous allons faire une analyse plus formelle du comportement du circuit et exploiter les équations différentielles.

Pour simplifier cette analyse, nous partons du principe qu'avec des circuits linéaires, la réponse du circuit à un signal (Réponse = signal de sortie), aura l'allure du signal. Après le saut indiciel, le signal représente un palier. La sortie devrait, elle aussi, présenter (mais au bout d'un certain temps) l'allure du palier.

L'analyse se déroule généralement en deux phases.

En mathématique on parle d'analyse sans second membre et d'analyse avec second membre.

Physiquement, la première nous permet d'extraire le transitoire (comportement du circuit pour revenir à un état d'équilibre suite à une excitation), la seconde correspond au permanent (comportement du circuit vis à vis d'un signal permanent).

La réponse complète correspond à la somme des deux comportements.

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Développement

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow RC \frac{dV_C}{dt} = -V_C \Rightarrow \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int \frac{dV_C}{V_C} = \int -\frac{dt}{RC} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\text{Log}(V_C) = -\frac{t}{RC} + K_1$$

$$V_C = e^{-\frac{t}{RC} + K_1} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{K_1} = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Comportement complet = Transitoire + Permanent

$$V_C = V_0 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{et} \quad K_2 ???$$

6

Nous commençons par développer l'équation sans second membre en séparant les termes V_C du reste.

On trouve un terme dV_C/V_C dont le calcul intégrale donnera LNV_C (à une constante près).

Le résultat de ce développement vaut $V_C = K_2 e^{-t/RC}$

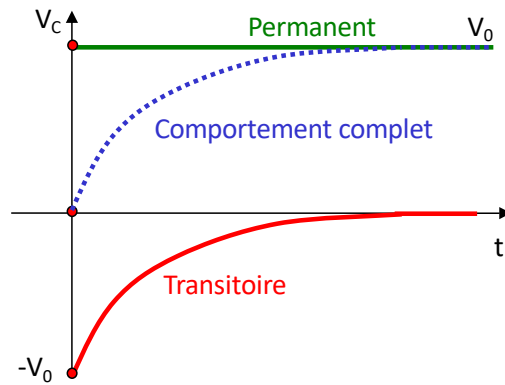
Sachant que le permanent aura l'allure de U , l'expression finale vaudra $V_C = U + K_2 e^{-t/RC}$ où K_2 doit être évaluée.

Mais comment évaluer K_2 ?

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Cas particulier

Cas particulier: $V_C(0) = 0 \Rightarrow 0 = V_0 + K_2 \cdot e^0 \Rightarrow -V_0 = K_2$



$$V_C = V_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

7

Pour faciliter cette analyse de K_2 , il suffit d'identifier une valeur particulière simple à exploiter.

Dans le cas où $t = 0$, cette valeur existe.

En effet, à $t = 0$, le condensateur n'a pas eu le temps de se charger, aussi,

$$V_C(0) = 0 = V_0 + K_2 e^0.$$

On en déduit que $K_2 = -V_0$

Interprétation: Sachant que le circuit a été perturbé par une explication V_0 ($-V_0$ exprime son déficit par rapport à son état d'équilibre), $-V_0 \cdot e^{-t/\tau}$ indique comment l'état d'équilibre sera retrouvé.

Ceci nous donne la relation globale

$$V_C = V_0 \cdot (1 - e^{-t/RC}) = \text{Permanent} + \text{transitoire}$$

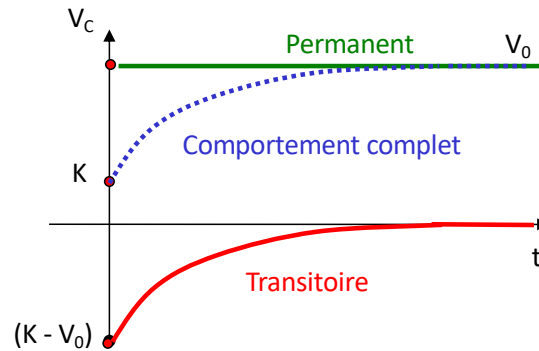
7

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Bas

Analyse mathématique: Condition initiale différente

$$V_C = V_0 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(0) = K(\text{charge initiale}) \Rightarrow K = V_0 + K_2 \cdot e^0 \Rightarrow K - V_0 = K_2$$



$$V_C = V_0 + (K - V_0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = K + (V_0 - K) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

8

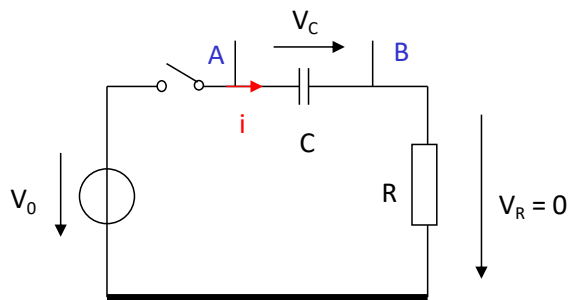
Les calculs précédents peuvent être généralisés, si la condition au départ change ($V_C(0)$ différent de 0).

Avec la méthode précédente, nous évaluons l'expression de K_2 et ainsi, l'expression globale.

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Observations

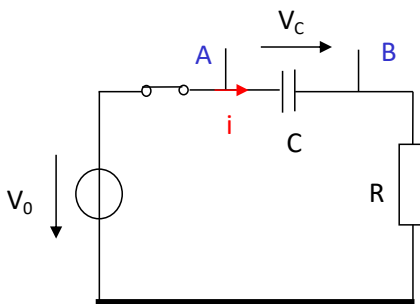
Situation avant l'événement



État avant le saut

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 0 \\ V_C = 0 \text{ hypothèse} \\ V_B = 0 \\ V_A = 0 \end{array} \right.$$

Situation après l'événement



	$t_0 = 0$	$t_1 > t_0$	$t_2 \gg t_0$
V_C	? $V_C = 0$	$Q = C.V_C$	
V_B	? $V_B = V_0$		
V_A	V_0		
i	?		

9

Dans le cas d'un filtre passe-haut, l'analyse du saut indiciel est un peu plus subtile, compte tenu du comportement du condensateur.

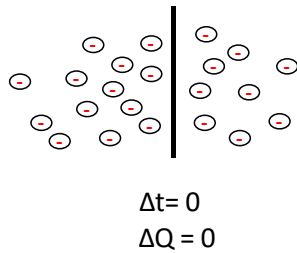
On suppose avant le saut (interrupteur ouvert) que le condensateur est déchargé $V_C = 0$, et que la tension aux bornes de $R = 0$ (car pas de courant si la boucle n'est pas fermée).

Au moment où l'interrupteur se ferme, la tension V_0 est instantanément appliquée en A. Mais que vaut la tension B?

Ce que l'on peut affirmer, c'est qu'en laissant du "temps" au système, celui-ci trouvera un état d'équilibre où $V_A = 0$ et $V_B = 0$ V et aucun courant ne chargera ou ne déchargera le condensateur.

Comportement de la capacité

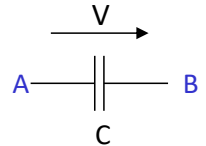
Vision physique



$$\text{Si } \Delta t = 0 \Rightarrow \Delta Q = 0$$

$$\text{or, pour une capacité } \Delta Q = C\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$$

$$V = V_A - V_B \text{ or } \Delta V = \Delta V_A - \Delta V_B = 0 \Rightarrow \Delta V_A = \Delta V_B$$

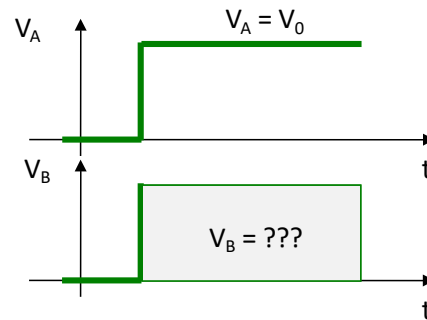


Autre vision

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Si $\omega = 0$, C assimilable à un circuit ouvert

Si $\omega = \text{infini}$, C assimilable à un court circuit



Observons le condensateur pour une variation qui dure 0s. Deux visions sont possibles.

1) 0s, c'est l'équivalent d'une photographie. Si on déplace la photo d'une hauteur à une autre, l'analyse débutant dès que la photo a changé de position montre qu'aucune charge ne s'est déplacée (même à la vitesse de la lumière, i, faut du temps pour effectuer un parcours).

Au niveau du condensateur, c'est la même chose. En un temps 0s, aucune charge n'a affecté le condensateur.

Or $Q = CV$, ou encore $\Delta Q = C\Delta V$, ce qui implique qu'il n'y a pas de variation de tension.

$V = V_A - V_B$, aussi, lorsque la tension varie instantanément au point A, le point B varie dans les mêmes proportions, ce qui garantit qu'il n'y ait pas eu de variation de tension entre les points A et B.

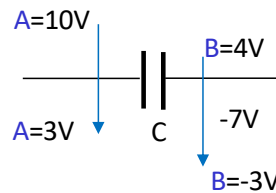
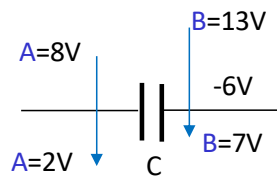
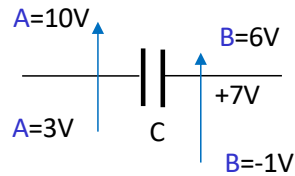
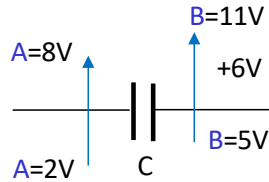
$$\text{Ev } \varepsilon\phi\phi\epsilon\tau, \Delta V = \Delta (V_A - V_B) = 0 \Rightarrow \Delta V_A = \Delta V_B$$

2) Un saut de tension qui dure 0s équivaut une fréquence infinie. Le condensateur dont l'impédance vaut $1/j\omega C$, correspond à un court-circuit pour cette fréquence.

Conséquences: quelques exemples de sauts

Avec un saut qui s'effectue en un temps nul on peut appliquer le théorème de superposition

- L'état qui précédait le saut (assimilable à la contribution d'une source continue)
- L'effet du saut (assimilable à la contribution d'une source variable)



11

L'objectif est d'observer l'état des tensions en A et B et d'appliquer un saut indicel positif et négatif

A l'instant $0+$, c'est-à-dire, au moment où le saut se produit, ce dernier se superpose à la tension qui existait en B à l'instant $0-$ (tension à l'instant précédent le saut)

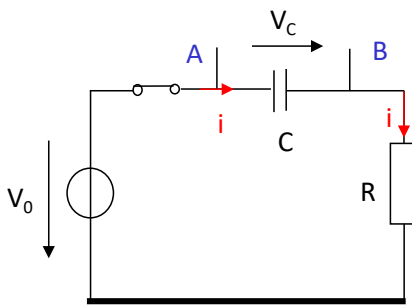
Le condensateur se comporte comme un court-circuit pour ce saut.

L'explication phénoménologique évoquée dans la slide précédente est peut-être plus logique.

En un temps $\Delta t = 0 = 0+ - 0-$, la différence de potentiel aux bornes du condensateur n'a pas eu le temps de changer. Cette différence de potentiel observée en $0-$ doit être la même en $0+$

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Analyse complète



	$t_0 = 0$	$t_1 > t_0$	$t_2 \gg t_0$
V_C	0	$\nearrow$	V_0
V_B	$0 + V_0$	$\searrow$	0
V_A	$0 + V_0$	V_0	V_0
i	$\frac{V_B}{R} = \frac{V_0}{R}$	$\searrow$	0

Avec les équations différentielles

$$i = \frac{V_B}{R} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d(V_A - V_B)}{dt} \quad \text{avec} \quad V_A = V_0 = cte \Rightarrow \frac{d(V_B)}{dt} = -\frac{V_0}{RC}$$

On a directement l'équation sans second membre donc
Le permanent = 0 et le transitoire est décrit par l'équation $V_B = K_2 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ K_2 ????

12

Comme point de départ, nous connaissons la condition initiale $V_C(0) = 0$ ou $V_A = V_B = V_0$

A partir du moment où $V_B = V_0$, il existe une différence de potentiel aux bornes de R qui génère un courant permettant au condensateur de se décharger.

La tension B descendra jusqu'à se stabiliser à 0 V.

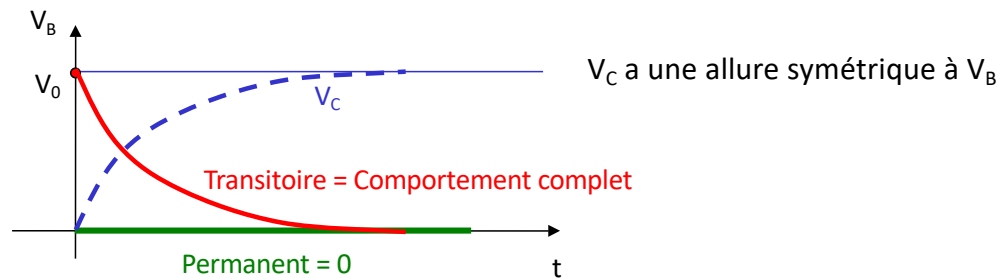
Avec l'équation du courant, nous obtenons une équations différentielle. Pour analyser un tel système, nous ré-adoptons la méthode du filtre passe-bas: Il y aura deux expressions à déterminer (le permanent et le transitoire) et une constante à évaluer.

Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Analyse mathématique: Cas particulier

Cas particulier: $V_B(0) = V_0 \Rightarrow V_0 = K_2 \cdot e^0 \Rightarrow V_0 = K_2$

$$V_B = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



13

Le développement montre que le transitoire et le l'expression globale se confondent. Le permanent vaut toujours 0V.

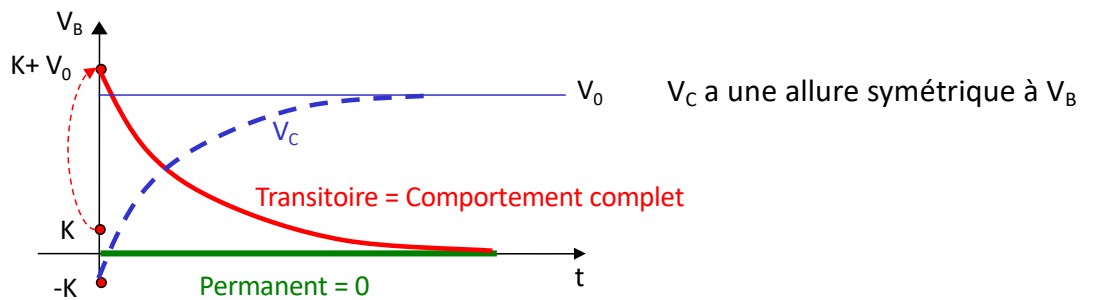
Saut indiciel appliqué à un filtre passe-Haut

Analyse mathématique: Condition initiale différente

L'équation différentielle ne change pas $i = \frac{V_B}{R} = C \cdot \frac{dV_C}{dt} = C \cdot \frac{d(V_A - V_B)}{dt}$ et $-dV_B = \frac{1}{RC} \cdot V_B \cdot dt$

Juste après le saut on aura $V_B(0) = K(\text{charge initiale}) + V_0$, $K + V_0 = K_2 \cdot e^0 \Rightarrow K_2 = K + V_0$

$$V_B(t) = (V_0 + K) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



14

Nous pouvons aussi généraliser cette expression, lorsque le système démarre, alors que le condensateur n'était pas totalement déchargé.

Le saut de tension qui affecte V_B est décalé de la tension initiale K .

Cas Général

Passe-Bas ou passe-Haut

Chemin à parcourir

Etat initial

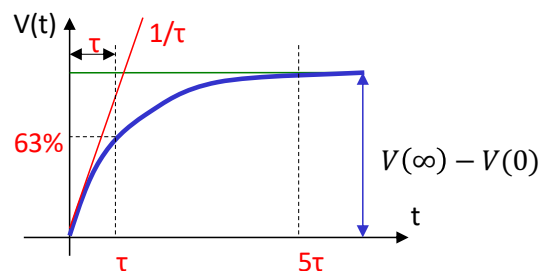
Loi de parcours OU
% du chemin parcouru

$$V(t) = V(0) + (V(\infty) - V(0)) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Chemin parcouru

Remarques:

- $RC = \tau$
- Propriétés de τ :
 - $V(\tau) = 63\%$ de la charge
 - $V(5\tau) > 99\%$ de la charge
 - $V(7\tau) > 99.9\%$ de la charge



15

Qu'il s'agisse d'un filtre passe-bas ou passe-haut, nous pouvons déterminer une loi généralisant le comportement de ces circuits.

A un temps t donné, la tension de sortie d'un circuit RC correspond à sa tension initiale à laquelle s'est rajouté le chemin parcouru pendant le temps écoulé (évolution de la tension)

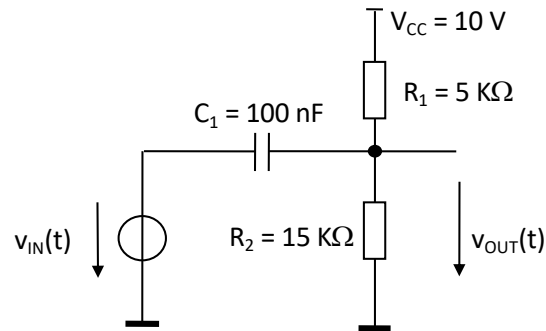
Le chemin parcouru s'exprime aussi à partir du parcours maximal qu'un tel circuit peut réaliser si on lui "laisse le temps" ($V(\infty) - V(0)$), pondéré par le pourcentage du chemin parcouru durant le temps écoulé.

Ce pourcentage est une loi exponentielle.

Cette expression met en évidence le terme RC qui est une constante appelée aussi τ . Elle représente un temps de référence caractéristique du circuit, en particulier:

- La tension de sortie a parcouru, au bout d'un temps $t = \tau$, 63% du chemin total.
- La pente à l'origine ($t=0$) vaut $1/\tau$. Il est alors naturel que cette pente coupe l'axe ($V(\infty) - V(0)$) au bout d'un temps $t = \tau$.
- La tension de sortie a parcouru, au bout d'un temps $t = 5\tau$ est supérieure à 99% du chemin total. C'est suffisant pour considérer que charge et décharge du condensateur sont complètes.

Application



Exercice 1 :

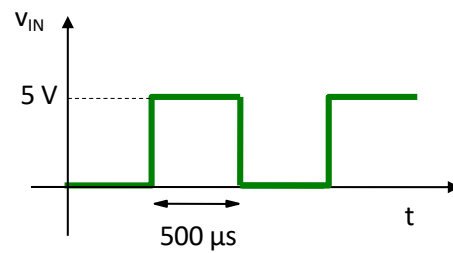
Soit $v_{IN}(t) = A \sin(2\pi ft)$, avec $A = 5 \text{ V}$ et $f = 1 \text{ kHz}$

Quelle est l'allure du signal $v_{OUT}(t)$? ?

Exercice 2 :

Soit $v_{IN}(t)$, le signal carré proposé ci-contre

Quelle est l'allure du signal $v_{OUT}(t)$? ?



16

L'analyse d'un tel circuit est intéressante car elle permet d'exploiter le théorème de superposition.

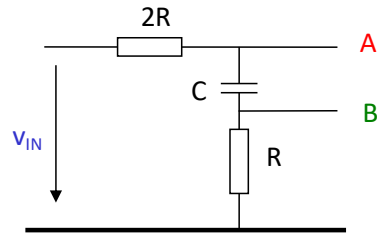
En effet, un signal continu $V_{CC} = 10 \text{ V}$ et un signal variable $v_{IN}(t)$ vont affecter le circuit.

Pour $V_{CC} = 10 \text{ V}$, seules les résistances ont un rôle (diviseur résistif) à jouer, alors que pour $v_{IN}(t)$ le signal voit un filtre passe-haut, les deux résistances étant alors considérées en parallèle.

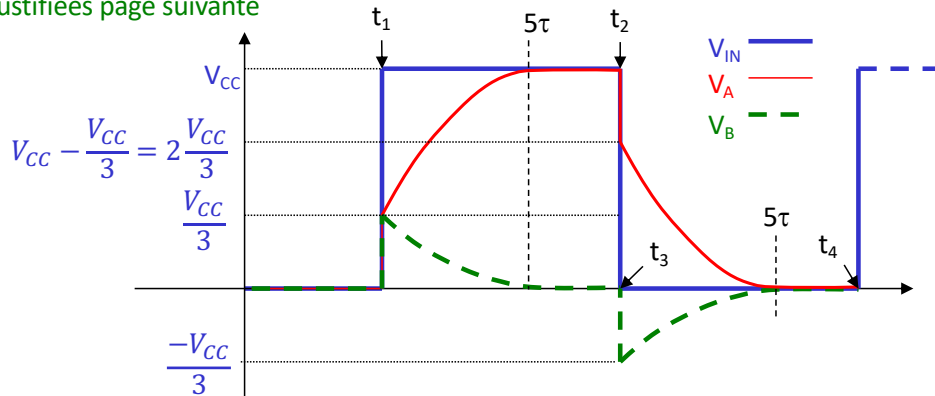
Recette de cuisine pour un signal carré

Exemple de montage analysé avec le saut indiciel

$$\tau = (R + 2R).C = 3RC$$



Allures obtenues justifiées page suivante



17

On s'intéresse aux allures aux points **A** et **B**

Bien qu'il n'y ait pas de valeurs numériques les expressions littérales donnent des résultats très précis (voir tableau), car il existe une proportionnalité simple entre les résistances.

Lorsque des valeurs numériques seront proposées, il faut vérifier si la constante de temps τ du circuit est suffisamment petite par rapport à $T/2$ pour affirmer que charge et décharge sont complètes. Son expression ici vaut: $\tau = (R+2R).C = 3RC$

Cette expression est obtenue en court-circuitant V_{IN} .

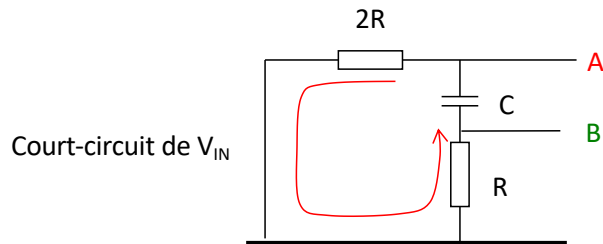
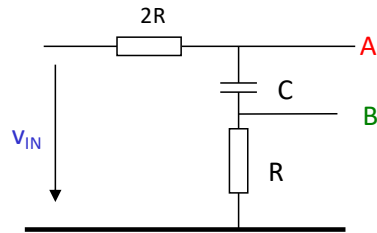
On regarde alors quelle est la résistance vue par la capacité. C'est la résistance à travers laquelle la capacité devra se décharger pour retrouver son point d'équilibre

L'allure générale est obtenue grâce à l'étude du circuit pour 4 points:

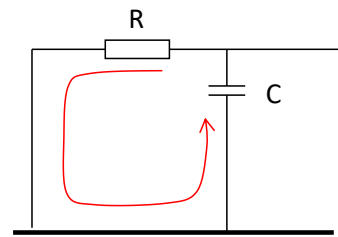
- t_1 juste après le saut positif
- t_2 juste avant le saut négatif
- t_3 juste après le saut négatif
- t_4 juste avant le saut positif

Calcul de τ

Exemple de montage analysé avec le saut indiciel



Réseau de résistances permettant de décharger C



Ressemble au passe-bas vu en début de cours

Le calcul de la constante de temps peut être obtenu soit en posant l'équation différentielle du circuit, soit à partir d'un schéma équivalent à un condensateur qui doit se décharger (pour trouver son état d'équilibre) à travers le réseau de résistances connecté à ses bornes. Comme il s'agit d'un retour à l'équilibre, on part du principe qu'il n'y a pas d'excitation et le signal V_{IN} est remplacé par un court-circuit.

Dans le schéma proposé, les deux résistances se retrouvent alors en série.

Analyse pour quatre temps significatifs

Situation	Analyse	Schéma équivalent	V_A	V_B
Avant t_1			0	0
à t_1	On applique la superposition d'un signal AC (dû au saut) et d'un signal DC qui correspond aux tensions à l'équilibre établies avant le saut (<i>0 dans ce cas</i>) AC correspond à un saut $+V_{CC}$ La capacité pour le saut se comporte comme un court-circuit	 Schéma AC	Avant Saut 0 + Effet Saut $V_{CC} \frac{R}{R+2R} = \frac{V_{CC}}{3}$	Avant Saut 0 + Effet Saut $V_{CC} \frac{R}{R+2R} = \frac{V_{CC}}{3}$
à t_2	La capacité est un circuit ouvert et le circuit est à l'équilibre. Les rapports résistifs donnent les tensions aux différents points	 Schéma DC	Avant Saut V_{CC}	Avant Saut 0
à t_3	On applique la superposition d'un signal AC (dû au saut) et d'un signal DC qui correspond aux tensions à l'équilibre établies avant le saut (<i>tensions obtenues en t2</i>) AC correspond à un saut $-V_{CC}$ La capacité pour un saut se comporte comme un court-circuit	 Schéma AC	Avant Saut V_{CC} + Effet Saut $-V_{CC} \frac{R}{R+2R} = -\frac{V_{CC}}{3}$	Avant Saut 0 + Effet Saut $-V_{CC} \frac{R}{R+2R} = -\frac{V_{CC}}{3}$
à t_4	La capacité est un circuit ouvert et le circuit est à l'équilibre. Les rapports résistifs donnent les tensions aux différents points	 Schéma DC	Avant Saut 0	Avant Saut 0

19

Aux points t_1 et t_3 , les sauts ayant une fréquence infinie, nous pouvons considérer les capacités comme des courts circuits.

Dans la réalité, nous pouvons considérer qu'au moment du saut (qui dure 0 s) nous superposons deux phénomènes (en tout point du montage):

- la tension de repos qui précédait le saut, car au bout d'un temps 0s, son effet est toujours présent
- L'effet du saut à travers le circuit avec des capacités assimilées à des courts-circuits.

Nous pouvons appliquer le théorème de superposition:

$$V_A = V_A(AC) + V_A(DC)$$

$$V_B = V_B(AC) + V_B(DC)$$

On remarquera que juste après le saut, la différence de potentiel entre les points A et B n'aura pas évolué (ce qui était prévisible).

Aux points t_2 et t_4 , si le temps imparti est supérieur à 5τ , les capacités ont retrouvé leur état de repos car elles se sont entièrement chargées ou déchargées. Nous pouvons considérer les capacités comme des circuits ouverts et analyser un nouveau circuit équivalent.